LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA
MATEMATISKA INSTITUTIONEN

TENTAMENSSKRIVNING
ALGEBRA
2005-08-26 – 2005-09-06

Använd MAPLE för beräkningarna. Problemen kan innehålla några parametrar ($A, B, C, D \ldots$). Man väljer dem enligt sitt personnummer ABCDEF-PQRS. Till exempel, om personnumret är 650307-2384 då är $A = 6, C = 0, R = 8$.

1. Faktorisera polynomet $x^5 - Bx + 2$ i $\mathbf{Z_5}[x]$.

2. Låt $G = S_8$ vara den symmetriska gruppen. Visa att G inte har :

a) några element av ordning 11; (0.3)

b) några element av ordning 9; (0.3)

c) några udda element av ordning 15. (0.4)

3. a) Beräkna A^{2005^2} mod 13 (0.5)

b) Låt H vara mängden av alla komplexa $3 \times 3-$matriser med absoluta beloppet av determinanten lika med 1. Visa att H är en normal undergrupp i den multiplikativa gruppen av alla inverterbara komplexa $3 \times 3-$matriser. (0.5)

4. En ring R ar Boolesk om $a^2 = a$ för alla a i R. Visa att R är kommutativ och att $a + a = 0$ för alla a i R. (Ledning: betrakta $(a + b)^2$ och $(a + a)^2$.)

5. Låt $f(x) = x^4 + 2 \in \mathbf{Q}[x]$. Visa att

a) $K = \mathbf{Q}[x]/(f(x))$ är en kropp. (0.5)

b) $g(t) = t^3 + 2$ är irreducibelt över K. (0.5)

6. a) Bestäm alla irreducibla polynom $f(x)$ i $\mathbf{Z_2}[x]$ av grad ≤ 4. (0.3)

b) Visa att produkten av alla irreducibla polynom av graderna 1 och 3 är lika med $x^8 - x$. (0.3)

c) Visa att produkten av alla irreducibla polynom av graderna $1, 2$ och 4 är lika med $x^{16} - x$. (0.4)